3° Μάθημα:

21/10/2019

Άσκηση 3.2.4 σελ 33:

Το συγκεκριμένο πείραμα με τον άνθρωπο έχει την Μαρκοβιανή ιδιότητα αφού η ανταπόκριση του σε μια επανάληψη του πειράματος εξαρτάται μόνο από την ανταπόκριση του στο αμέσως προηγούμενο.

X_n: η Σ.Δ. που περιγράφει την ανταπόκριση του ατόμου στο n-στο πείραμα.

$S = \{0 = \text{σωστά}, 1 = \text{λάθος}\}$

$P_{00} = 0.7 \Rightarrow P_{01} = 0.3$

$P_{10} = 0.4 \Rightarrow P_{11} = 0.6$

Άρα ξέρω τον $P = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 = a \\ 0.4 = b & 0.6 \end{pmatrix}$

α. Αν στο 1° πείραμα ανταπόκριθηκε σωστά, ποια η πιθανότητα να ανταποκριθεί σωστά στο 35°?

Δηλαδή ψάχνω την $P_{00}^{(34)}$ (34 βήματα γιατί είμαι στο 1° άρα μέχρι το 35 είναι 34 βήματα)

Απόδ:

Εφαρμόζω την απόδειξη που μάθαμε στη θεωρία για $n=34$, $a = \ldots$, $b = \ldots$

β. Αν στο 1° πειρ. ο ασθενής ανταποκρίθηκε λανθασμένα, ποια η πιθανότητα το 5° πειρ. να είναι εκείνο στο οποίο ο ασθενής ανταποκρίθηκε σωστά για 1η φορά.

Απόδ:

1° πειρ Λανθασμένα
2° πειρ. Λανθασμ.
3° πειρ -//-
4° πειρ. -//-
5° πειρ. Σωστά για 1η φορά

$P(\Lambda \to \Lambda \to \Lambda \to \Lambda \to \Sigma) =$
$= 0.6 \quad 0.6 \quad 0.6 \quad 0.4$

3.2.1: Θεωρείστε Μαρκοβιανή αλυσίδα 2 καταστάσεων. Εάν $\mu_{ij}^{(n)}$ είναι ο αναμενόμενος αριθμός επισκέψεων της κατάστασης j σε n βήματα ξεκινώντας από την κατάσταση i. Να βρεθούν $\mu_{ij}^{(n)}$ τιμές, συναρτήσει στοιχείων του πίνακα P ή του P^n

Λύση:

- $\mu_{ij}^{(n)}$ = αναμενόμενος αριθμός επισκέψεων της κατάστασης j ξεκινώντας από την i σε n-βήματα
- $\mu_{ij}^{(n)} = E X_{ij}^{(n)} = E(Y_{ij}^{(1)} + Y_{ij}^{(2)} + \dots + Y_{ij}^{(n)})$
- $X_{ij}^{(n)}$ η τ.μ. που παριστάνει τον αριθμό των επισκέψεων σε n-βήματα της κατάστασης j ξεκινώντας από την i.
- $Y_{ij}^{(k)} = \begin{cases} 1, & \text{αν επισκέπτεται το j στο k βήμα ξεκινώντας από το i} \\ 0, & \text{αν όχι} \end{cases}$

$$\sum_{k=1}^{n} E(Y_{ij}^{(k)}) = \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot P(Y_{ij}^{(k)}=1) = \sum_{k=1}^{n} P_{ij}^{(k)}$$

3.2.2: Για την Μαρκοβιανή αλυσίδα της προηγούμενης άσκησης, έστω ότι η διαδικασία βρίσκεται κάποια στιγμή στην κατάσταση 0.
a_0: ο αριθμός των $\boxed{\text{νέων}}$ χρονικών περιόδων που η διαδικασία παραμένει στην κατάσταση 0 μέχρι να μηδενίσει στην 1. Να βρεθεί η κατανομή και η μέση τιμή της a_0. Δίνεται $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = (1-x)^{-1}$

Λύση:

Δυνατές τιμές της τ.μ. a_0: 0, 1, 2, 3, ...

$P(a_0=0) = P(0 \to 1) = a$

$P(a_0=1) = P(0 \to 0 \to 1) = (1-a)\cdot a$

$P(a_0=2) = P(0 \to 0 \to 0 \to 1) = (1-a)^2 \cdot a$

$P(a_0=k) = (1-a)^k \cdot a$

δεν ≠ νέα χρον. περίοδ.

$0 \to 1$

$0 \to 0 \to 1$

$0 \to 0 \to 0 \to 1$

- - - -

$$\sum_{n=1} n \cdot x^{n-1} = \left((1-x)^{-1}\right)' = (1-x)^{-2}$$

$$E(a_0) \overset{\text{ορ.}}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} k\, P(a_0 = k) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(k(1-a)^k \cdot a\right) =$$

$$= a \sum_{k=0}^{\infty} k(1-a)^k = a(1-a) \sum_{k=0} k(1-a)^{k-1} = a(1-a)\cdot\left(1-(1-a)\right)^{-2} =$$

$$= \frac{1-a}{a}.$$

$$\sum x^n = (1-x)^{-1} \qquad x^k = k x^{k-1} \qquad f(x)^k = k f^{k-1} f'$$

Παίρνω τη παράγωγο

$$\sum n x^{n-1} = \left[(1-x)^{-1}\right]' = (-1)(1-x)^{-1-1}(-1) = (1-x)^{-2}$$

Μ.Α. με περ/ρει από 2 καταστάσεις

X_n: Σ.Δ. σε διακριτό χρόνο με διακριτό χώρο καταστάσεων

Μαρκοβιανή + Ομογενής

$S = \{S_1, S_2, S_3, \dots\}$

Ερωτήματα

(1) $P_j^{(n)} = P(X_n = j)$

(2) $P_{ij}^{(n)} = P(X_n = j \mid X_0 = i)$

(3) Οριακές Πιθανότητες

Ορισμός: (Τυχαίος περίπατος)

Τυχαίος περίπατος είναι η Σ.Δ. που περιγράφει τη κίνηση ενός σωματιδίου (μπαλάκι) που κινείται κατά μήκος του άξονα των πραγμ. αριθμών με τον εξής τρόπο:

Έστω X_0 η θέση του σωματιδίου αρχικά

η θέση του την επόμενη χρονική στιγμή X_1 είναι

$X_1 = X_0 + Z_1$, όπου Z_1 η τ.μ. που παριστάνει την τυχαία μετατόπιση

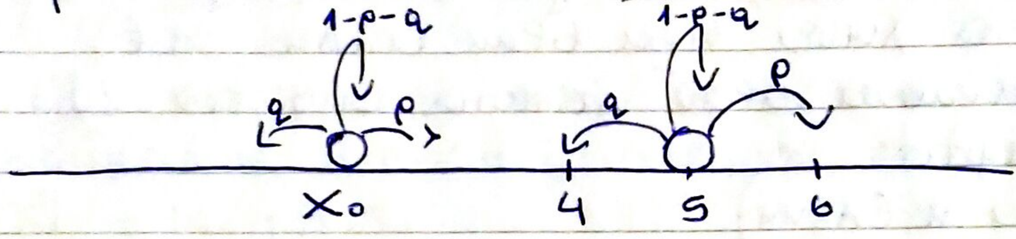
$X_2 = X_1 + Z_2 = X_0 + Z_1 + Z_2$

$X_n = X_{n-1} + Z_n = X_0 + Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n$

Όταν ο τυχ.περ. δεν έχει κανένα εμπόδιο στην κίνηση του λέγεται ελεύθερος τυχ.περ.
Στην ειδική περ. που οι μετατοπίσεις Z_i ακολουθούν το εξής πιθανοθεωρητικό μοντέλο:

$$P(Z_i = z) = \begin{cases} p, & z = 1 \text{ (ένα βήμα μπροστά)} \\ q, & z = -1 \text{ (ένα βήμα πίσω)} \\ 1-p-q, & z = 0 \text{ (να αναπηδήσει)} \end{cases}$$

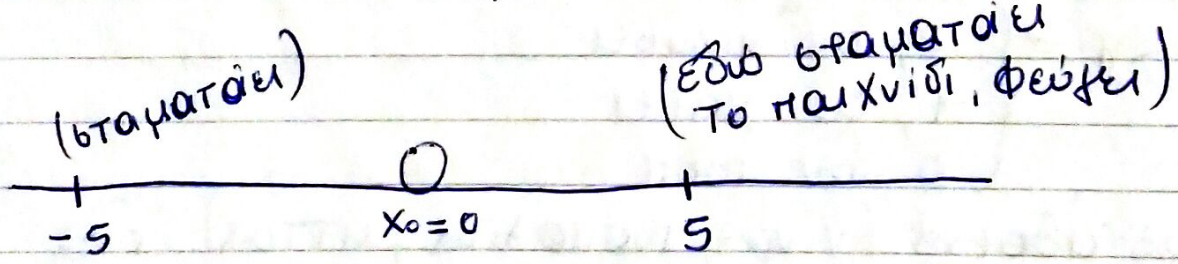
λέμε ότι είναι ένας απλός τυχαίος περίπατος.



Τυχαίος απλός περ. με φράγματα απορρόφησης σημαίνει ότι υπάρχουν σημεία στα οποία σταματά η κίνηση του σωματιδίου.

π.χ. για την κατανόηση: Ο Αποστόλης έχει 5€ κι πάει στο προποτζίδικο κι παίζει μέχρι τα χρήματα του να γίνουν 10€ ή να μείνει άφραγκος.

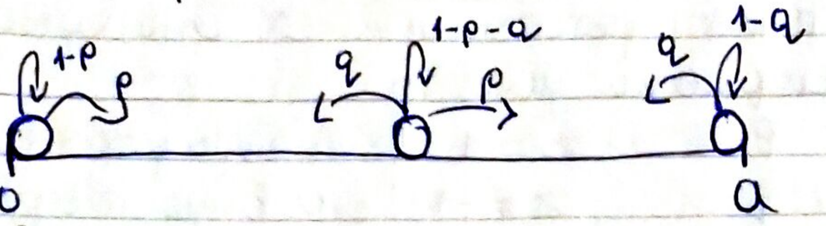
X_n: Σ.Δ. που παριστάνει το κέρδος του Αποστόλη μετά το n-οστό παιχνίδι.



Τυχαίος απλός περίπατος με φράγματα ανάκλασης σημαίνει πως όταν φτάσει εκεί το σωματίδιο, η κίνηση του δεν σταματά αλλά κινείται προς μια κατεύθυνση.

θετικός αριθμός.

Π.χ. κατανόησης: Έστω X_n ο αριθμός χρηστών που είναι συνδεδεμένοι σε συγκεκριμένη χρον. στιγμή σε έναν server χωρητικότητας a.



Παραδείγματα:

1) Η Ελένη έχει 5€ κι η Όλγα 3€. Παίζουν ένα παιχνίδι και όποια χάσει δίνει στην άλλη 1€. Το παιχνίδι τελειώνει όταν κάποια από τις δύο μείνει χωρίς λεφτά.

$p = P(\text{κερδίσει η Ελένη})$

$q = P(\text{κερδίσει η Όλγα})$

$1-p-q = P(\text{ισοπαλία})$

X_n: η Σ.Δ. που παριστάνει κέρδος Ελένης αμέσως μετά το n-οστό παιχνίδι. Είναι σε διακριτό χρόνο. γιατί κοιτάω το κέρδος της Ελένης μετά το n-οστό παιχνίδι.

Χώρος καταστάσεων: $S = \{-5, -4, -3, -2, 1, 0, 1, 2, 3\}$

Είναι Μαρκοβιανή γιατί $X_n = X_{n-1} + Z_n$

όπου $Z_n = \begin{cases} 1, & \text{αν νικήσει} \\ -1, & \text{αν χάσει} \\ 0, & \text{αν ισοπ.} \end{cases}$

Οι πιθ. μετάβασης (νίκης, ισοπαλίας, ήττας) της Ελένης είναι ανεξάρτητες από την χρονική στιγμή που γίνεται το παιχνίδι πρόκειται Μ.Α. πεπερασμένων καταστάσεων με πίνακα μετάβασης ενός βήματος τον εξής:

$P=$

	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
-5	1	0	0	0	0	0	0	0	0
-4	q	1-p-q	p	0	0	0	0	0	0
-3	0	q	1-p-q	p					
-2			q	1-p-q					
-1				q					
0					q				
1						q			
2							q	q	
3	0	0	0	0	0	0	0	0	1

φραγ. απορ: $-5, 3$.

2) Απλός τυχ. περ. με δύο φραγμ. ανάκλασης στο 0 και στο a.

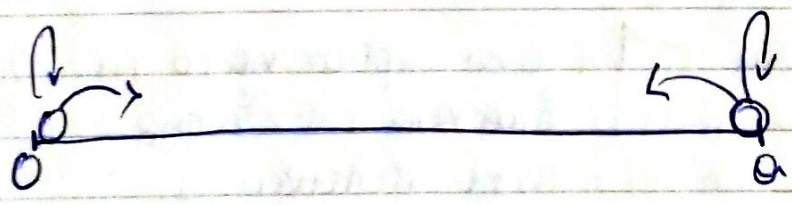
Προφανώς έχει την Μαρκοβιανή ιδιότητα. Το μέλλον εξαρτάται μόνο από το παρόν, όχι από το παρελθόν.

$X_n = X_{n-1} + Z_n$

$S=\{0,1,2,\dots,a\}$

$P=$

	0	1	2	----	a-1	a
0	1-p	p	0	----	0	0
1	q	1-p-q	p			
2						
a-1				q	1-p-q	p
a					q	1-q



3) Σύστημα Εξυπηρέτησης (Σ.Ε.)

Θεωρώ Σ.Ε. στο οποίο πελάτες φτάνουν και ο αριθμός των πελατών περιγράφεται από την Poisson(λ).

$X \sim P(\lambda)$, $P(X=x) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$, $x=0,1,\dots$, $E(x)=\lambda$

όπου λ ο ρυθμός άφιξης πελατών σε μονάδα χρόνου.
Οι πελάτες εξυπηρετούνται από ένα άτομο.
X_n: η Σ.Δ. που παριστάνει τον αριθμό των πελατών που είναι μέσα στο Σ.Ε αμέσως μετά το τέλος εξυπηρέτησης του n-οστού πελάτη. Να αιτιολογηθεί πλήρως αν είναι Μ.Α. κ' να βρεθεί ο πίνακας μετάβασης στις ακόλουθες περιπτώσεις.

$1^{η}$ περ: Χρόνος εξυπηρέτησης σταθερός κ' ίσος με t χρον. μονάδες.

$2^{η}$ περ: ο χρόνος εξυπηρέτησης ακολουθεί διακριτή τμ με δυνατές τιμές $t_1, t_2, \dots, t_k$ χρον. μονάδες και αντίστοιχες πιθ. $P_1, P_2, P_3, \dots, P_k$ και $P_1+P_2+\dots+P_k=1$

$3^{η}$ περ: ο χρόνος εξυπηρέτησης t ακολουθεί συνεχή κατανομή με σ.π.π. $b(t)$

$4^{η}$ περ: ο χρόνος εξυπηρ. T με παράμετρο μ ακολουθεί εκθετική κατανομή $T \sim \text{εκθ}(\mu)$

X_n: η Σ.Δ. σε διακριτό χρόνο γιατί παρατηρώ το σύστημα αμέσως μετά το τέλος εξυπηρ. ενός πελάτη. με διακριτό χώρο καταστάσεων
$S = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n - 1 + \text{όσοι ήρθαν κατά τη διάρκεια της εξυπηρ } n+1 \text{ πελάτη} & , X_n \geq 1 \\ \text{όσοι ήρθαν κατά τη διάρκεια της εξυπηρ. } n+1 \text{ πελάτη} & , X_n = 0 \end{cases}$$

Ορίζω A_{n+1} τον αριθμό που παριστάνει όσους ήρθαν στη διάρκεια εξυπηρ. n+1 πελάτη.

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n - 1 + A_{n+1} \to B, & X_n \geq 1 \\ A_{n+1} \to B, & X_n = 0 \end{cases}$$

Ο A_{n+1} δεν εξαρτάται από το ποια είναι η χρον. στιγμή. μπορώ να το συμβ. με B

Άρα: $X_{n+1} = \begin{cases} X_n - 1 + B, & X_n \geq 1 \\ B, & X_n = 0 \end{cases}$

		0	1	2	3
	0	$P(B=0)$	$P(B=1)$	$P(B=2)$	
	1	$P(B=0)$	$P(B=1)$	$P(B=2)$	
$P=$	2	0	$P(B=0)$	$P(B=1)$	
	3				

$b_k = P(B=k)$ δηλ. έχω τον εξής πίνακα.

$$\begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ & b_0 & b_1 \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$